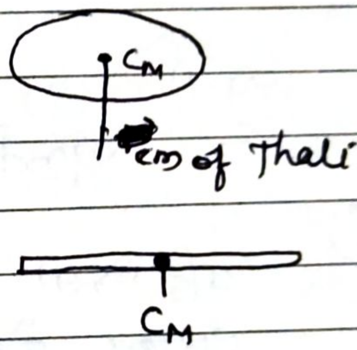
① द्रव्यमान केंद्र (Centre of Mass)

किसी पिण्ड का संपूर्ण द्रव्यमान वह होता है जो संपूर्ण द्रव्यमानों का योग हो, परन्तु

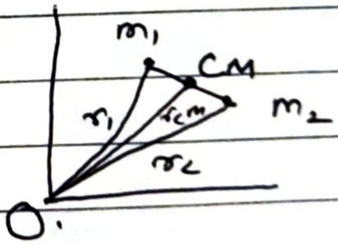
किसी पिण्ड या कणों के निकाय का द्रव्यमान केंद्र वह बिंदु होता है, जहाँ पिण्ड या निकाय का संपूर्ण द्रव्यमान केंद्रित माना जाता है।

Example (i) थाली को एक उँगली से उठाने के लिये waiter उसके केंद्र पर हाथ रखते हैं

(ii) किसी लकड़ी को उठाने के लिये उसके केंद्र से या बीच से उठाते हैं वह केंद्र $C_M$ होता है उसी पर उसका द्रव्यमान केंद्रित होता है।

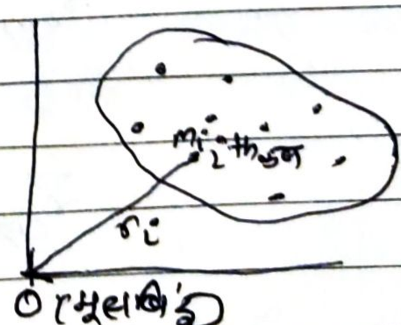



यदि दो कण हैं




$$\vec{r}_{cm} = \frac{r_1 m_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \quad \text{——— (1)}$$

यदि n कण उपस्थित हैं तब




$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad \text{——— (2)}$$

जहाँ $m_i$ iवाँ कण का द्रव्यमान तथा $r_i$ iवाँ कण की स्थिति मूलबिंदु O के सापेक्ष।

संपूर्ण पिण्ड का द्रव्यमान $\sum_{i=1}^{n} m_i = M$

② तब समी. (2) के हर में $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ को रखने पर

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i}{M} \quad \text{——— (3)}$$

उपर्युक्त समी. में $r_i$ (सापेक्षिक स्थिति) तथा द्रव्यमान $m_i$ तथा $M$ (संपूर्ण द्रव्यमान) है अतः हम यह स्पष्ट रूप से देख सकते हैं कि $\vec{r}_{cm}$ (द्रव्यमान केंद्र की स्थिति

मुख्यतः कणों के द्रव्यमानों तथा आपेक्षिक स्थितियों पर निर्भर करता है।

समी. (3) के लिये अनेक स्थितियाँ हो सकती हैं।

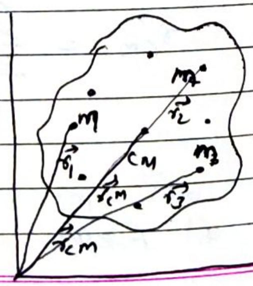
i) यदि किसी निकाय के सभी कणों के द्रव्यमान बराबर हों अर्थात

$$m_1 = m_2 = \dots m_i = m_n = m$$

तब समी. (3) से

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m \sum_{i=1}^{n} r_i}{M} = \frac{\cancel{m} \sum_{i=1}^{n} r_i}{\cancel{m} n} \quad \boxed{M = mn}$$

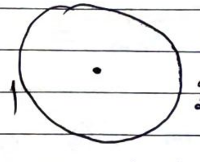
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i}{n}$$




इससे तात्पर्य यह है कि $\vec{r}_{cm}$ अर्थात द्रव्यमान केंद्र की स्थिति उस पिण्ड के ज्यामितिय केंद्र के संपाती होती है।

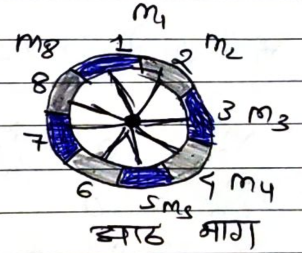
~~यदि किसी~~ ③

उदाहरण – (i) जैसे हम एक ठोस गोला (वृत्त) लेते हैं। तब इसका द्रव्यमान केंद्र इसके अपने केंद्र पर स्थित होगा

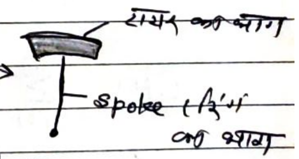



क्योंकि गोला ठोस है और इसमे घनत्व प्रत्येक बिंदु पर समान है।

(ii) यदि हम cycle का tyre तथा रिंग दोनों को लें तब इसे माना जाये कि यह अलग अलग आठ भागों से बना है।




अब इस चक्के के एक भाग नीचे के चित्र में देख सकते हैं – रिंग का भाग तथा टायर का भाग दो अलग-अलग चीज मिलके चक्के के एक भाग का निर्माण किये तथा चक्के के एक भाग को आठ बराबर का योग से एक चक्का बनेगा अब यदि इस चक्के के पहले भाग का द्रव्यमान $m_1$ दूसरे भाग का $m_2$ इसी प्रकार अन्य भागों का भी $m_3, m_4 \dots m_8$ तक रहेगा। चूंकि सभी भाग बराबर हैं।

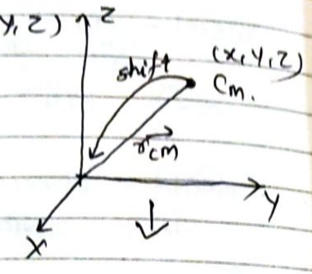



$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \dots = m_8 = m$$

अब जब आपको इस चक्के को Balance बनाये रखने के लिये उठाना है तब आप इसके केंद्र से उठायेंगे और वही इसका द्रव्यमान केंद्र होता है।

(4) (c) यदि निकाय का द्रव्यमान केंद्र मूलबिंदु पर स्थित हो

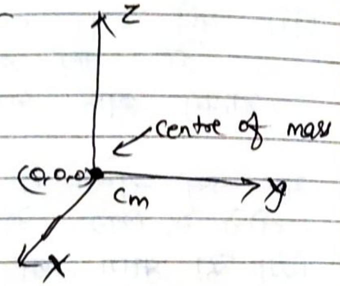
सबसे पहले माना $C_m$ के निर्देशांक $(x, y, z)$ से दिया जाता है तब




$$\vec{r}_{cm} = \hat{i}\, x_{cm} + \hat{j}\, y_{cm} + \hat{k}\, z_{cm} \quad \text{——— (4)}$$

अब यदि $C_m$ को केंद्र माना जाये तब मूलबिंदु के (मूलबिंदु) निर्देशांक

$(x, y, z) = (0, 0, 0)$




समी. (4) में $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ रखने पर

$$\vec{r}_{cm} = \hat{i}.0 + \hat{j}.0 + \hat{k}.0$$
$$\vec{r}_{cm} = 0 \quad \text{——— (5)}$$

समी. (3) से $\vec{r}_{cm}$ का मान (5) रखने पर

$$\text{L.H.S.} \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i}{M} = 0 \quad \text{——— (6)}$$

अब समी. (6) के L.H.S को Zero करने के लिये या तो $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i = 0$ होना चाहिये या फिर $M = \infty = \frac{1}{0}$

क्यों कि $M \neq \infty$ (Possible नहीं है अतः)

$\sum_{i=1}^{n} m_i r_i = 0$ होगा तब समी. (6) से

(5)

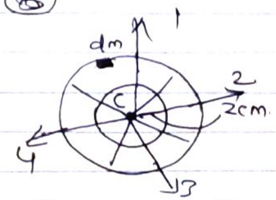
$$\sum_{i=1}^{n} m_i r_i = 0 .$$

यहाँ पर $m_i r_i$ इसको आघूर्ण कहते हैं। और इस समी. से स्पष्ट है कि द्रव्यमान केंद्र के चारों ओर आघूर्णों का योग शून्य हो जाता है।

नोट सिर्फ एक कण के लिये $m_i r_i \neq 0$ लेकिन $\sum_{i=1} m_i r_i = 0$ क्यों के योग के लिये

(d) अब यदि पिण्ड में द्रव्यमान एक समान रूप से वितरित हो तब, समी. (3) से

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm \quad \text{——— (8)}$$




माना कोई थाल है उसके चारों ओर बराबर वजन घनत्व होता है। जैसे हम चित्र में उसके केंद्र से किसी भी दिशा में आगे बढ़े यदि हम केंद्र से 2cm आगे बढ़ते हैं तब इस 2cm दूरी तक सभी कणों का द्रव्यमान बराबर होगा। चित्र में 4 direction में सभी दिशाओं में समान दूरीयों पर समान द्रव्यमान रहेगा अतः द्रव्यमान समान रूप से वितरित है।) तब यदि मैं एक छोटा सा द्रव्यमान कण dm का समाकलन $\vec{r}$ के साथ करूँ तो यह हमारे द्रव्यमान केंद्र की स्थिति बतायेगा।

अब. समी. (8) से

$$\hat{i}\, x_{cm} + \hat{j}\, y_{cm} + \hat{k}\, z_{cm} = \frac{1}{M}\left[\hat{i}\int x\, dm + \hat{j}\int y\, dm + \hat{k}\int z\, dm\right.$$

अब $\hat{i}, \hat{j}$ व $\hat{k}$ वाले पदों की तुलना करने पर

(6)

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm.$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm.$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\,dm.$$

(e) यदि पिण्ड में द्रव्यमान एकसमान वितरित हो तथा द्रव्यमान केंद्र मूल बिंदु पर हो तब समी. (6) व समी (4) इन दोनों स्थितियों को दर्शाते हैं तब दोनों को साथ मे रखने पर

$$\sum_{i=1}^{n} m_i r_i = 0$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int r\,dm$$

अब समी. (3) में

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i}{M}$$

$$\vec{r}_{cm} = 0.$$

$$\frac{1}{M}\int r\,dm = 0$$

$$\int r\,dm = 0 \quad \text{———} \quad (9).$$